Dr. Emanuel Scheidegger
Dipl. Math. Julia Eich

Modulformen I
WS 09/10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 10

Differentialgleichungen für Modulformen

37. Die Schwarzsche Ableitung.
Sei $y(x)$ eine nicht-konstante Funktion von $x \in \mathbb{C}$. Die Schwarzsche Ableitung von y bezüglich x ist

$$\{y;x\} := \frac{2y'y''' - 3(y'')^2}{2(y')^2}$$

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\left\{\frac{ay+b}{cy+d};x\right\} = \{y;x\}$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

   (b) (2 Punkte) Sei $x(z)$ eine nicht-konstante Funktion von z. Zeigen Sie, dass

$$\{y;z\} \quad = \quad \{x;z\} + \{y;x\}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

38. (a) (2 Punkte) Es seien ω_1 und ω_2 die Periodenintegrale aus Aufgabe 31. Definieren Sie $\tau(\lambda) = \frac{\omega_1(\lambda)}{\omega_2(\lambda)}$. Sei $\lambda(\tau)$ die Umkehrfunktion von $\tau(\lambda)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\{\lambda;\tau\} + \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^2(1-\lambda)^2}\lambda'^2 = 0.$$

   (b) (2 Punkte) Drücken Sie $\lambda(\tau)$ als rationale Funktion von $j(\tau)$ aus.

39. Lineare Differentialgleichung für E_4

   (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $E_4(\tau) = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; t(\tau)\right)^4$, wobei $t(\tau) = \frac{1728}{j(\tau)}$.

   (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den linearen Differentialoperator 5. Ordnung, der $E_4(\tau)$ annihiliert.

40. Eine Folge von Differentialgleichungen für Modulformen in Γ_1
Betrachten Sie für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ den Differentialoperator

$$\mathcal{L}_k = D^2 - \frac{k+1}{6}E_2 D + \frac{k(k+1)}{12}(DE_2)$$

(a) (1 Punkt) Es bezeichne ϑ_k die Serre–Ableitung. Zeigen Sie, dass gilt: $\mathcal{L}_k f = \vartheta_{k+2}\vartheta_k f - \frac{k(k+2)}{144} E_4 f$.

(b) (1 Punkt) Schliessen Sie aus (a), dass es für $k + 4 \not\equiv 0 \bmod 3$ einen linearen Operator $\phi_k \in \mathrm{End}(M_k(\Gamma_1))$ gibt, der auf $S_k(\Gamma_1)$ und $M_k(\Gamma_1)/S_k(\Gamma_1)$ durch Multiplikation mit $\frac{k(k+2)}{144}$ wirkt.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass wenn $F_k(\tau)$ ein Eigenvektor von ϕ_k zum Eigenwert κ_k ist, dann ist für $1 \le i \le m$ die Funktion $\Delta(\tau)^i F_{k-12i}(\tau)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert κ_{k-12i} ist. Bestimmen Sie m.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$f(\tau) = E_4{}^{\frac{k}{4}}\,{}_2F_1\left(-\tfrac{k}{12}, -\tfrac{k-4}{12}, -\tfrac{k-5}{6}; \tfrac{1728}{j(\tau)}\right)$$

für $k+4 \not\equiv 0 \bmod 3$ eine bis auf Normierung eindeutige Lösung von $\mathcal{L}_k$ ist. Bilden Sie dazu eine Linearkombination aller Eigenvektoren von ϕ_k und benutzen Sie, dass ${}_2F_1(a, b, c; z)$ ein Polynom ist, falls $a < 0$ oder $b < 0$.

Abgabetermin: Freitag, 8.1.2010 um 10:00 Uhr.